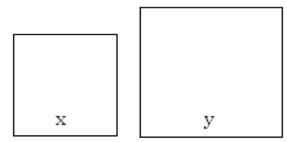
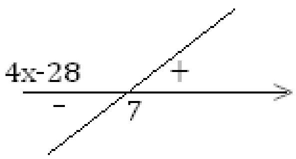
Примена првог извода функције

1. Одреди дужине страница два квадрата тако да њихов збир буде 14 а збир површина тих квадрата минималан.

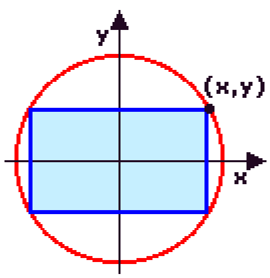


Ре: $x + y = 14$, $P(x, y) = x^2 + y^2$, $P(x) = x^2 + \sqrt{14 - x}$, $P'(x) = 4x - 28$

Први извод је једнак 0 за x=7 и у тој тачки долази до промене знака првог извода са – на +, тј. функција $P(x)$ прво опада па расте. Дакле, за x=7 функција $P(x)$ има минимум. Даље се лако види да је и y=7, тј. да су у питању квадрати са страницама истих дужина.



2. Од свих правоугаоника који су уписани у кружницу полупречника r одреди онај који има максималну површину.



Ре: $P(x, y) = 2x \cdot 2y$ и $x^2 + y^2 = r^2$

Од функције са две променљиве $P(x, y)$ елиминацијом једне променљиве, преко датог услова, добијамо функцију једне променљиве $P(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$

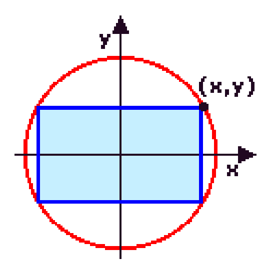
$$P'(x) = 4\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Водећи рачуна о природи проблема и о томе да се посматрана тачка налази у првом квадранту, добијамо $x = y = r\sqrt{2}$.

Дакле, од свих правоугаоника уписаних у дату кружницу максималну површину има квадрат.

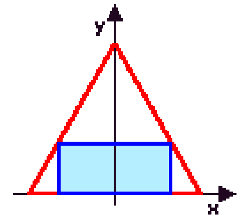
3. Од свих правоугаоника који су уписани у кружницу полупречника r одреди онај који има максималан обим.

Ре: квадрат странице $r\sqrt{2}$



4. Једнакокраки троугао има основицу 2b и висину h. Одреди димензије уписаног правоугаоника који има највећу површину.

Ре: димензије уписаног правоугаоника су b и $\frac{h}{2}$



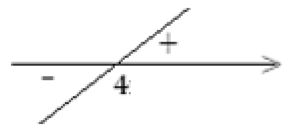
5. Желимо да направимо базен запремине $32m^3$ који је свуда исте дубине и чије дно је облика квадрата, а да при томе потрошимо најмање материјала за облагање пода и страна. Израчунај димензије тог базена.

Ре: Нека је x дужина, а уједно и ширина базена, а h дубина базена. Тада је

$P = x^2 + 4xh,\ V = x^2 h,\ h = \frac{32}{x^2}$

$P(x) = \frac{x^3+128}{x},\ P' = 0 \Leftrightarrow x = 4$

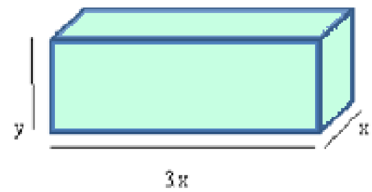
Промена знака првог извода показује да



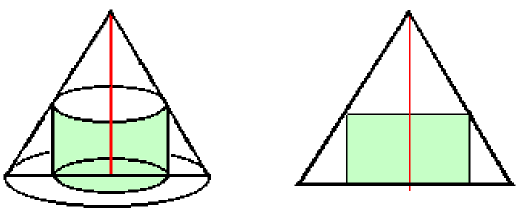
функција има минимум за x=$4m$ и $h = 2m$.

6. Одреди x и y тако да површина датог квадра буде минимална ако је запремина $36m^3$.

Ре: $x = 2$, y=...



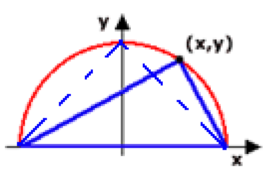
7. Права кружна купа има базу полупречника b и висину H. Које су димензије ваљка максималне запремине који се може уписаног у ту купу.



Ре: $\frac{1}{3}H, \frac{2}{3}b$

(сличност троуглова)

8. Од свих правоуглих троуглова са истом хипотенузом одреди онај који има највећи обим.

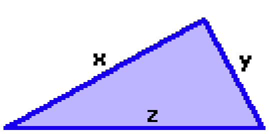


Ре: једнакокраки правоугли троугао

9. Од свих правоуглих троуглова са обимом 2p одреди онај који има максималну површину.

Ре:

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\ z = 2p - x - y,\ \mathrm{P} = \frac{xy}{2},\ \ \mathrm{P} = \frac{2p(x-p)}{x-2p}\ \ x_{1,2} = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)/p$

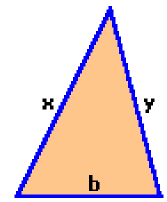


10. Од свих правоуглих троуглова који имају исту површину P одреди онај који има најмањи обим.

Ре: $O = x + \frac{2P}{x} + \sqrt{x^2 + 4\frac{P^2}{x^2}}$, $\ O'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2P)\left(\sqrt{x^4 + 4P^2} + x^2 + 2P\right) = 0$

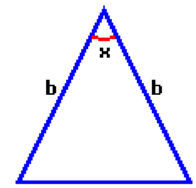
Једнакокраки троугао са катетама $x = y = \sqrt{2P}$ има најмањи обим.

11. Од свих троуглова са истом основицом b и обимом 2p одреди онај који има максималну површину.



Ре: $P(x,y)=\sqrt{p(p-b)(p-x)(p-y)}$
$y=2p-b-x$
$x=y$

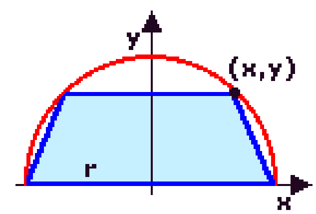
12. Од свих једнакокраких троуглова чији су краци дужине b одреди онај који има максималну површину.



Ре: $P=\frac{1}{2}b^2 sinx,\quad x=\frac{\pi}{2}$

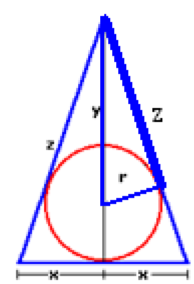
13. Одреди димензије трапеза који се може уписати у полукруг полупречника r тако да му површина буде максимална.

Ре: $P(x,y)=(r+x)y$
$P(x)=(r+x)\sqrt{r^2-x^2}\qquad x=\frac{r}{2}$



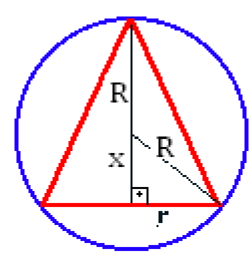
14. Које су мере једнакокраког троугла најмање површине који се може описати око круга полупречника r?

Ре: $P=xy\quad z=\frac{ry}{x}\qquad z^2=r^2y^2/x^2\quad x^2=\frac{r^2y}{y-2r}\quad x=r\sqrt{3}$



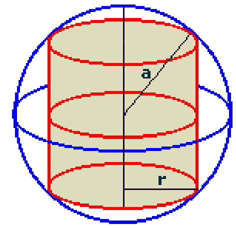
15. Од свих купа уписаних у сферу полупречника R одреди ону која има највећу запремину?

Ре: $V=\frac{1}{3}r^2\pi H,\ H=r+x,\ V=\frac{1}{3}(R^2-(H-R)^2)\pi H$
$V'=0\ \Leftrightarrow H=\frac{4}{3}R$, r =...

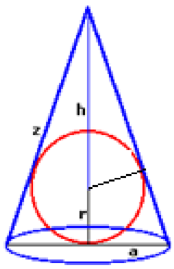


16. Дата је сфера полупречника a. Одреди димензије оног кружног ваљка који се може уписати у ову сферу тако да му површина омотача буде максимална.

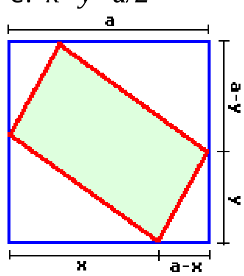
Ре: $r=\frac{a\sqrt{2}}{2},H=\cdots$



17. Одреди праву кружну купу најмање запремине која се може описати око сфере полупречника r.
Ре:

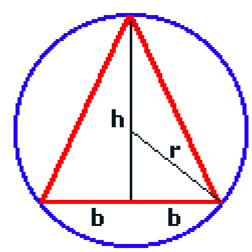


18. Одреди димензије правоугаоника (слика) који се може уписти у квадрат странице *a* тако да му површина буде максимална.
Ре: $x=y=a/2$

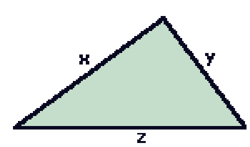


19. Од свих правоугаоника истог обима О одреди онај који има максималну површину.
Ре: квадрат

20. Одреди троугао максималне површине који се може уписати у круг полупречника r.
Ре: $h=\frac{3}{2}r,\ b=\cdots$

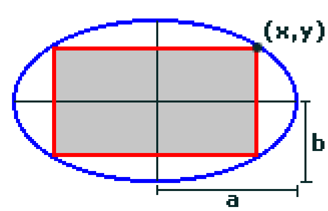


21. Од свих правоуглих троуглова са обимом *p* одреди онај који има најмању хипотенузу.
Ре: $x+y+z=p,\ \ x^2+y^2=z^2$
$(p-y-z)^2+y^2=z^2,\quad z=\frac{p^2-2py+2y^2}{2(p-y)}$
$z'=0 \Leftrightarrow 2y^2-4py+p^2=0,\quad y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}p, x=\cdots, z=\cdots$



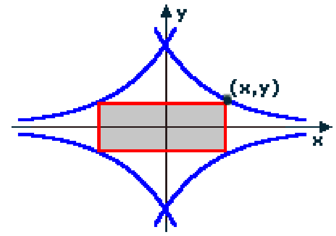
22. Од свих правоуглих троуглова са хипотенузом *c*, који има максималну површину?
Ре: једнакокраки правоугли троугао са катетама $\frac{c\sqrt{2}}{2}$

23. Од свих правоугаоника који се могу уписати у елипсу чије су полуосе *a* и *b* одреди онај који има максималну површину.
Ре: P=*ab*



24. Одреди правоугаоник максималне површине чија темена се налазе на графицима кривих линија $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $y=-e^x$ и $y=-e^{-x}$.

Ре: Теме правоугаоника које се налази у првом квадранту има координате $(1,\frac{1}{e})$.



25. Одреди дужине страница правоугаоника тако да му површина буде максимална а темена му припадају линијама $y=x(a^2-x^2)$ и $y=x(x^2-a^2)$.

Ре: Нацртај! За теме правоугаоника које се налази у првом квадранту је $x=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. На основу ове вредности може се израчунати друга координата и дужине страница.

26. Одреди димензије ваљка тако да му обим осног пресека буде дати број O а запремина максимална.

Ре: $H=r=\frac{1}{6}O$

27. Који кружни исечак површине S има најмањи обим?

Ре: $r=\sqrt{S}$

28. Дате су линије $y^2=2px$ и $x=a$. Одреди димензије правоугаоника уписаног у област ограничену овим линијама тако да му површина буде максимална.

Ре: $\frac{2}{3}a, 2\sqrt{\frac{2pa}{3}}$

29. Од свих правих кружних конуса површине P одреди онај чија је запремина максимална.

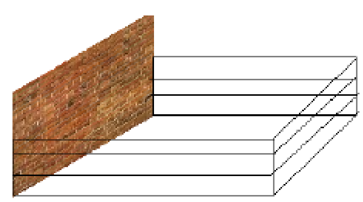
Ре: $V=\frac{1}{3}r^2\pi\sqrt{\left(\frac{P}{r\pi}-r\right)^2-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{r^2P^2-2r^4\pi P}$, $r=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{\pi}}$

30 На параболи $y=x^2$ одреди тачку која је најмање удаљена од праве $y=2x-4$.

Ре: A(1,1)

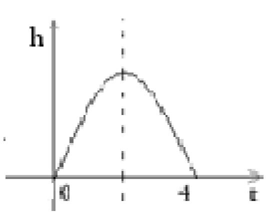
31. Потребно је направити ограду дужине $16m$ да би се оградио простор облика правоугаоника максималне површине тако да једна тог ограђеног простора буде већ постојећи зид. Израчунај димензије тог правоугаоника тако да ограђена површина буде максимална.

Ре: 4, 4 и 8



32. Лопта бачена у вис достиже висину $h[m]$ за време t$[s]$ по формули $h=4t-t^2$. Израчунај време потребно да лопта постигне максималну висину и одреди је.

Ре: 2s, $4m$



33. Одреди тачку (тачке) на графику функције $y = x^2$ која је најближа тачки $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$.
Ре: $(1,1)$ и $(-1,1)$

34. Одреди максималну запремину ваљка ако је збир висине и полупречника 24.
Ре: 2048π

35. Кутија са поклопцем облика квадра има запремину $72cm^3$. Дужина кутије је 2 пута већа од ширине. Израчунај висину кутије тако да количина материјала за њену израду буде најмања.
Ре: 3, 4 и 6

36.У једнакокраки правоугли троугао чије су катете дужине a уписан је правоугаоник тако да му две странице леже на катетама а једно теме на хипотемузи. Од свих таквих правоугаоника одреди обим оног чија је површина максимална.
Ре: $2a$

37. (ФОН) У правоугли троугао чије катете имају дужине a и b уписан је правоугаоник максималне површине тако да му једна страница припада хипотенузи триугла. Одреди дужине страница тог правоугаоника.

Ре: $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$

38. (ФОН) Дужина странице квадрата ABCD је $1cm$. Нека су E и F тачке редом на страницама AD и AB такве да је AE=AF и да је површина четвороугла CDEF максимална. Израчунај површину четвороугла CDEF.
Ре: $\frac{5}{8}$